



AKADEMIA GÓRNICZO-HUTNICZA
IM. STANISŁAWA STASZICA W KRAKOWIE

Wytrzymałość materiałów

EiP - Wykład Nr 7

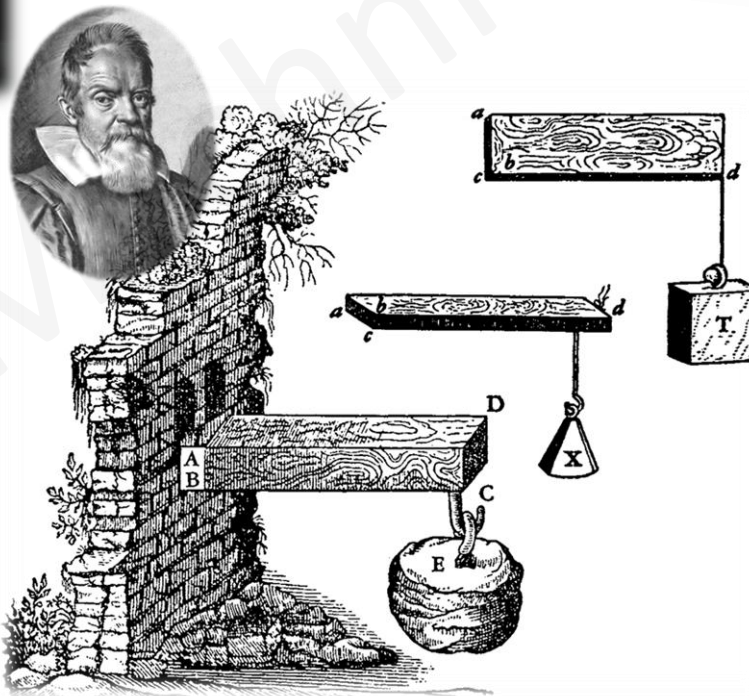
Zginanie prętów prostych – siły wewnętrzne

siły wewnętrzne w belkach, twierdzenie Swedlera – Żurawskiego, wyznaczanie wykresów sił poprzecznych i momentów zginających.

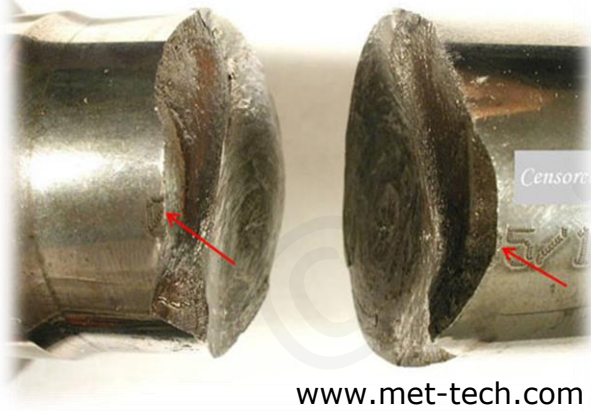
Wydział Inżynierii Mechanicznej i Robotyki
Katedra Wytrzymałości, Zmęczenia Materiałów i Konstrukcji

Dr hab. inż. Tomasz Machniewicz

7.1. Zginanie – przypadki „z życia” inżynierów – i nie tylko...

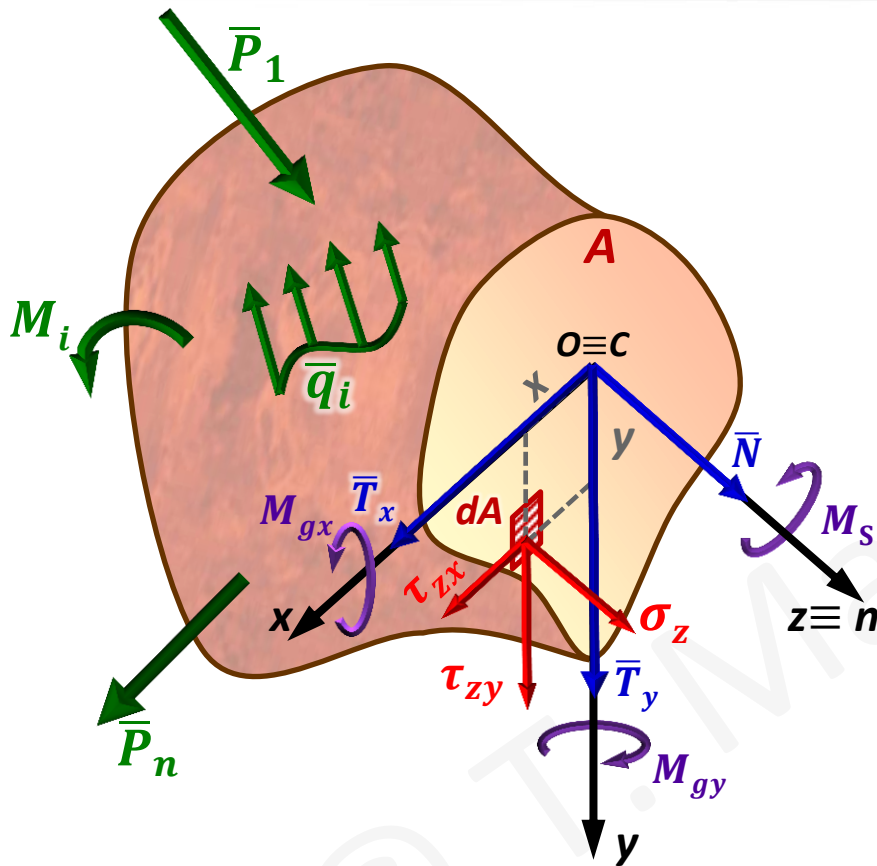


Galileo Galilei (1564–1642)
Dialogues Concerning Two New Sciences, 1638



<http://www.telegraph.co.uk>

7.2. Zginanie – równowaga sił wewnętrznych i naprężeń



$$N = \int_A \sigma_z dA \quad - \text{rozciąganie/ściskanie}$$

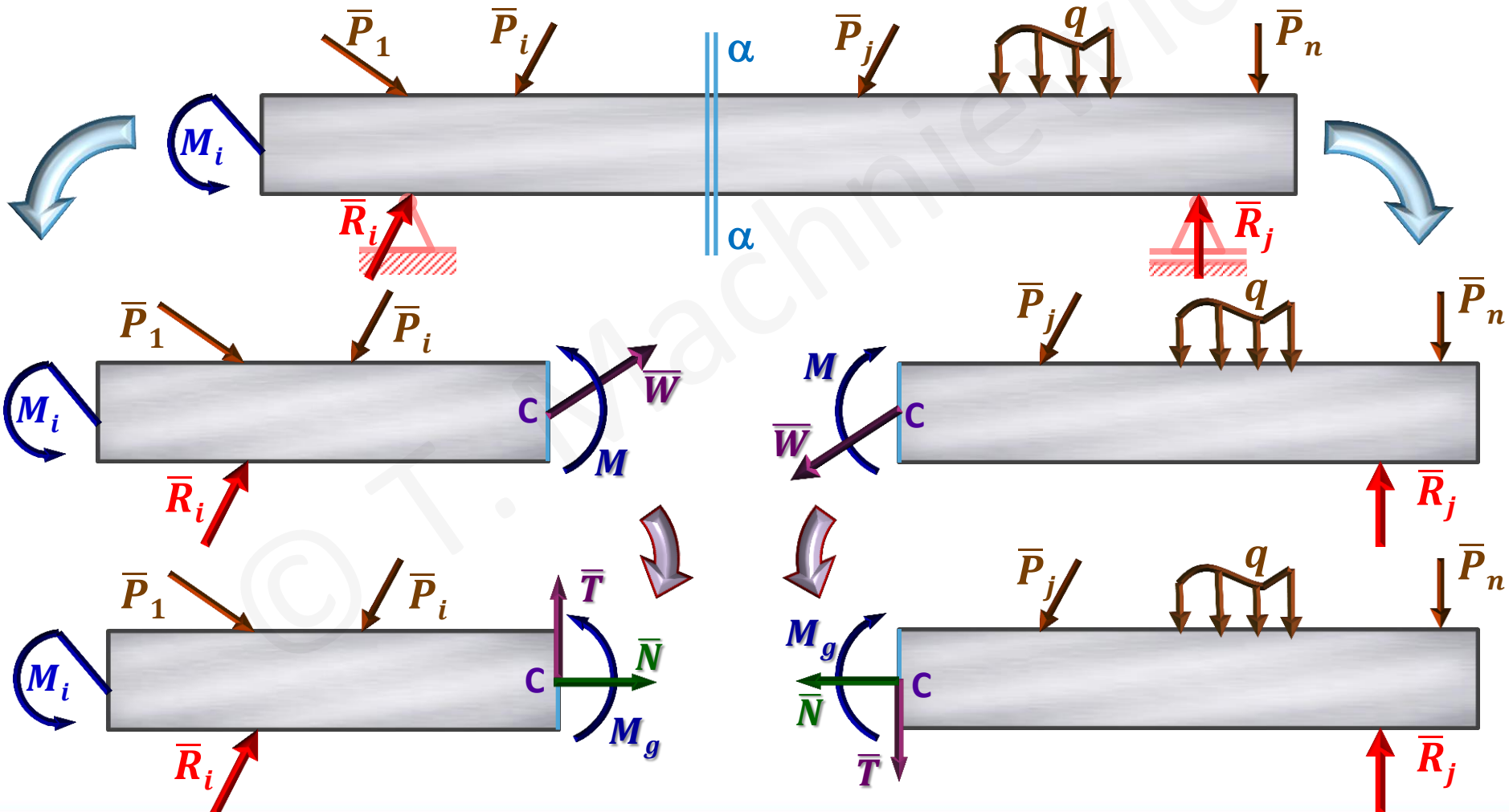
$$\left. \begin{aligned} T_x &= \int_A \tau_{zx} dA \\ T_y &= \int_A \tau_{zy} dA \end{aligned} \right\} - \text{ściananie}$$

$$\left. \begin{aligned} M_x &= \int_A \sigma_z y dA \\ M_y &= \int_A \sigma_z x dA \end{aligned} \right\} - \text{zginanie}$$

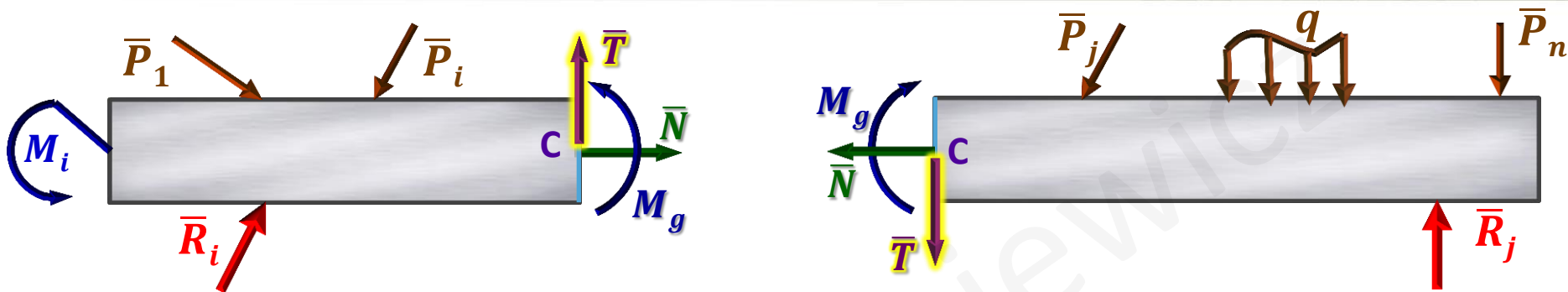
$$M_S = \int_A (\tau_{zy} x - \tau_{zx} y) dA \quad - \text{skręcanie}$$

7.3. Siły wewnętrzne w belkach

Belka – element konstrukcji o kształcie pręta, tj. o długości znacznie większej od wymiarów poprzecznych, poddany w dominującym stopniu zginaniu.

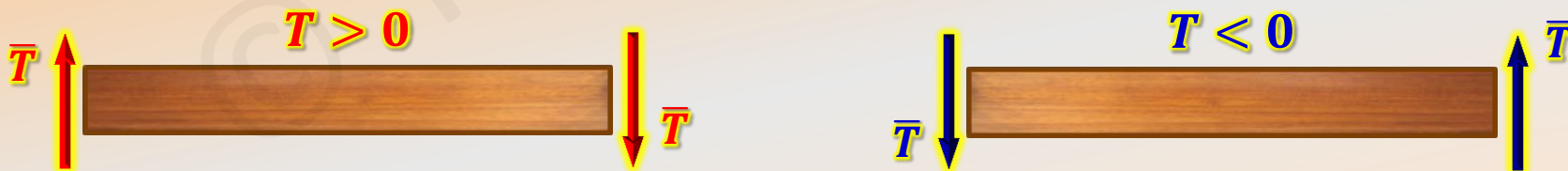


7.3. Siły wewnętrzne w belkach

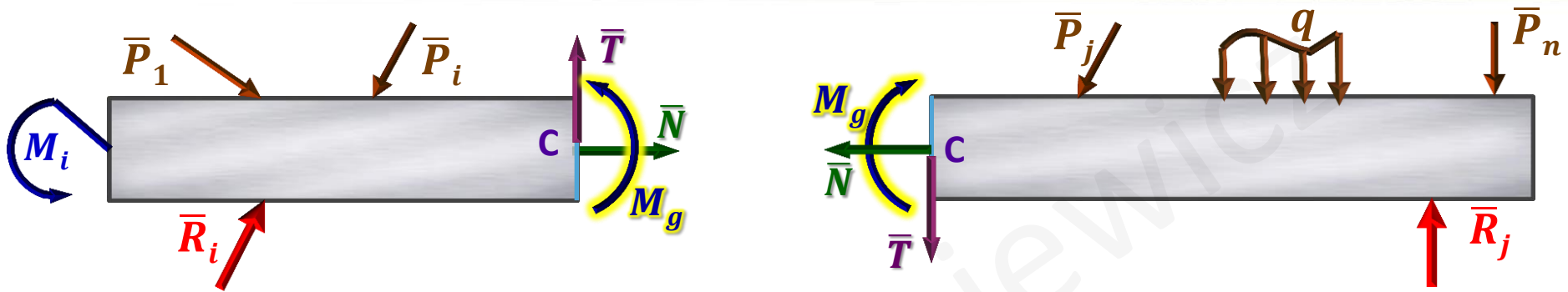


Siła poprzeczna (siła tnąca) w danym przekroju belki, jest algebraiczną sumą wszystkich sił poprzecznych (prostopadłych do osi belki) działających po jednej stronie rozpatrywanego przekroju.

Umowa dotycząca znaków sił poprzecznych:

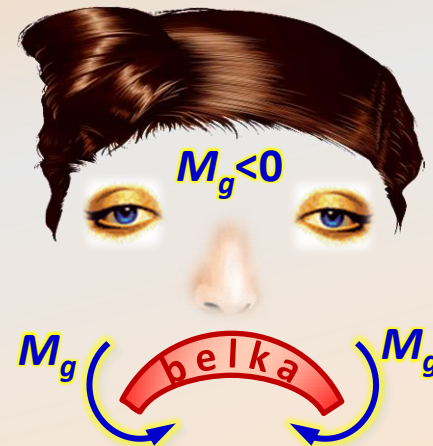
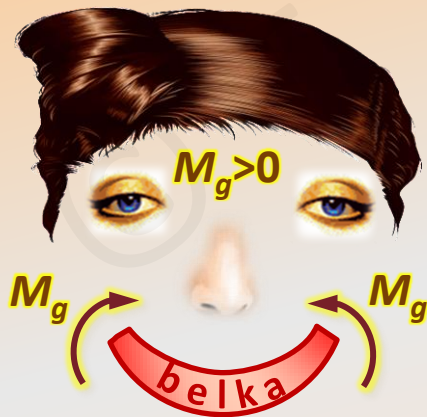


7.3. Siły wewnętrzne w belkach


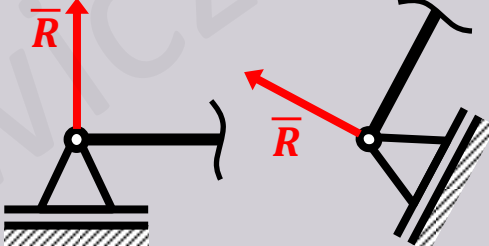

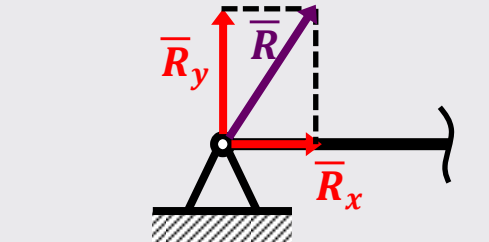
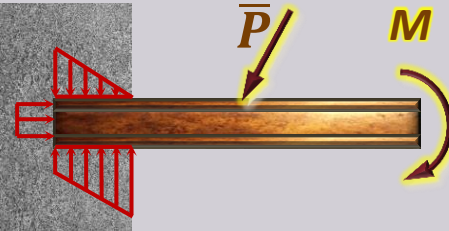
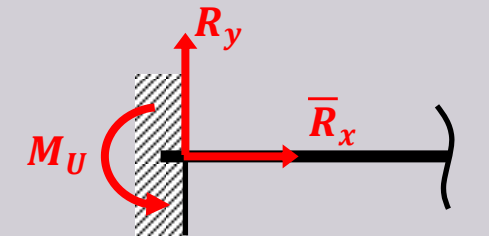
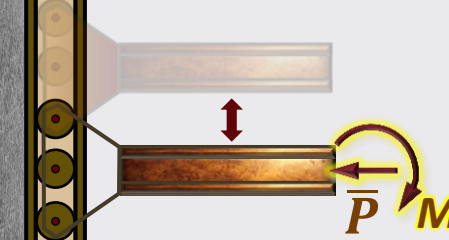
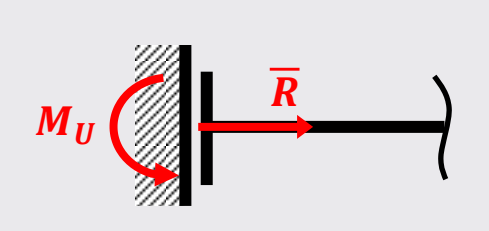


Moment zginający (M_g) w dowolnym przekroju belki poddanej działaniu płaskiego dowolnego układu sił jest algebraiczną sumą momentów pochodzących od wszystkich obciążeń działających po jednej ze stron tego przekroju, obliczanych względem jego środka ciężkości.

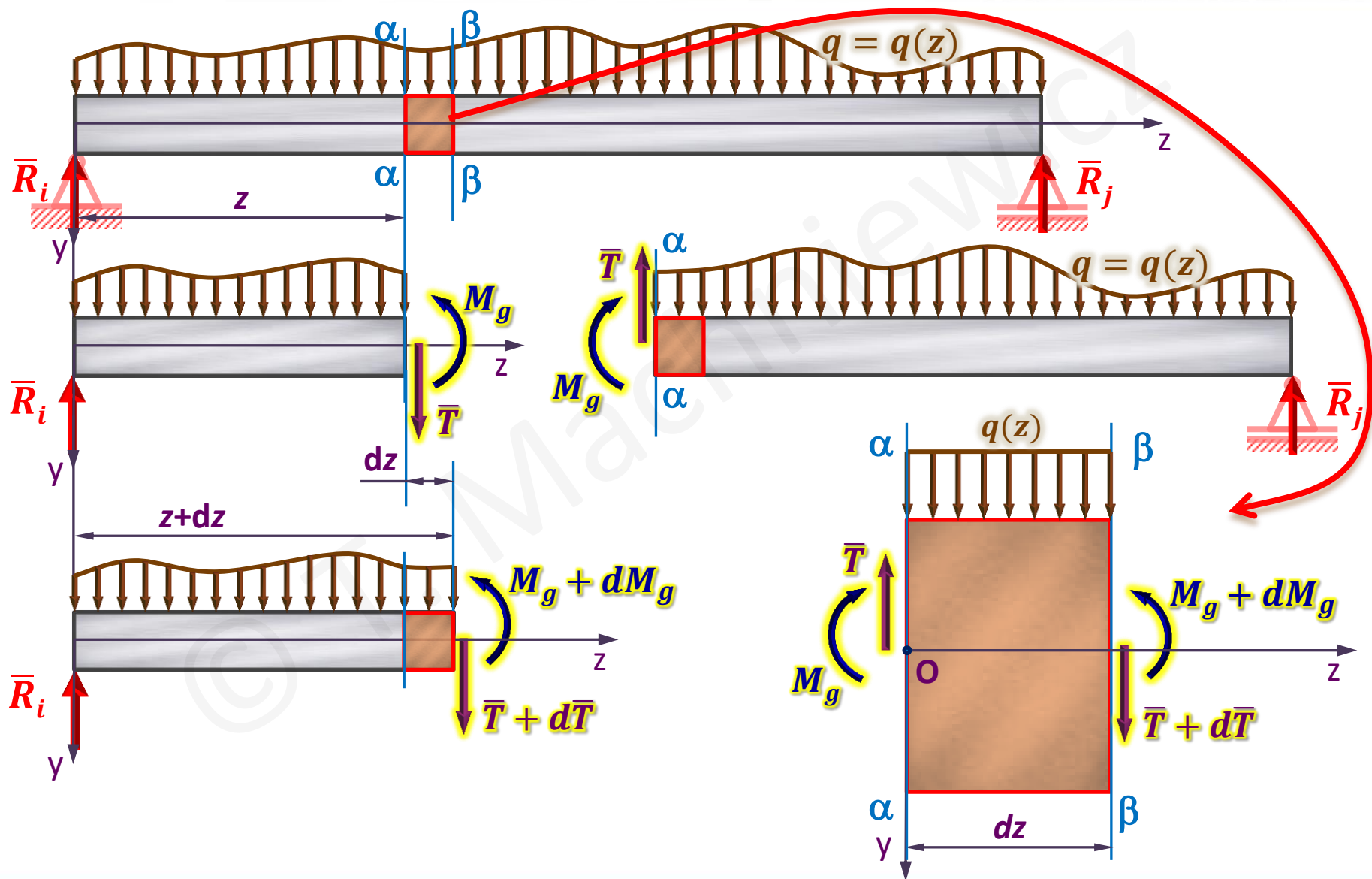
Umowa dotycząca znaków momentów zginających:



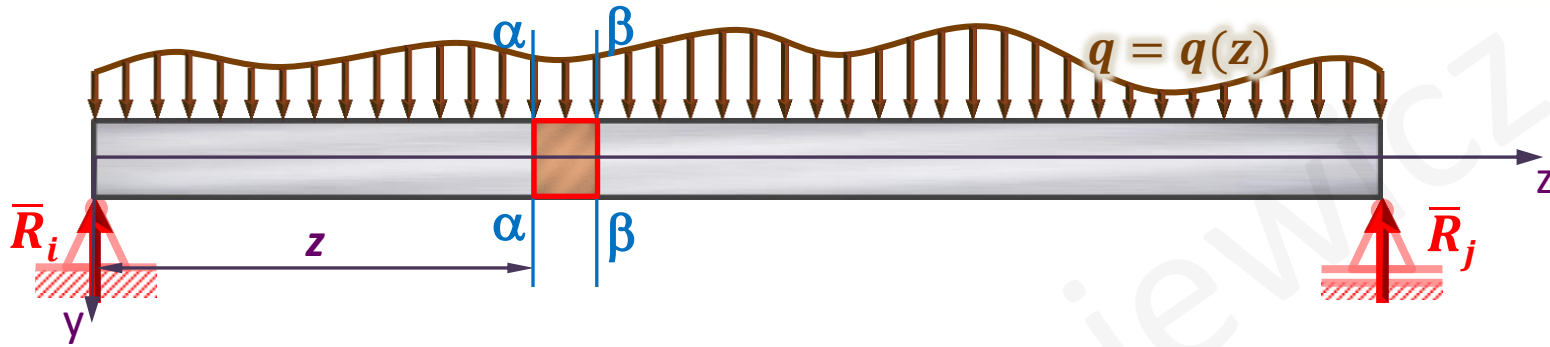
Charakterystyczne rodzaje więzów belek i związane z nimi siły reakcji.

| | | |
|--|--|---|
| <p>a) podpora przegubowa przesuwna reakcja prostopadła do płaszczyzny przesuwu</p> |  |  |
| <p>b) podpora przegubowa stała siła reakcji o dowolnym kierunku (dwie składowe reakcji)</p> |  |  |
| <p>c) utwierdzenie (wspornik) siła reakcji o dowolnym kierunku (dwie składowe reakcji) oraz moment utwierdzenia</p> |  |  |
| <p>c) utwierdzenie przesuwne moment utwierdzenia oraz siła reakcji prostopadła do płaszczyzny przesuwu</p> |  |  |

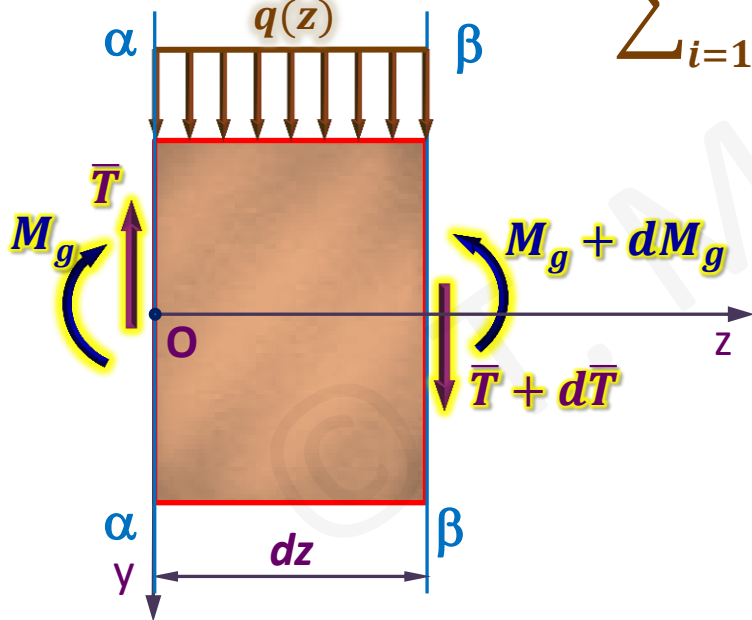
7.5. Zależności pomiędzy siłami wewnętrznymi a obciążeniem ciągłym belek – tw. Schwedlera–Żurawskiego



7.5. Zależności pomiędzy siłami wewnętrznymi a obciążeniem ciągłym belek – tw. Schwedlera–Żurawskiego



$$\sum_{i=1}^n F_{iy} = 0 \Rightarrow -\cancel{T} + q(z)dz + \cancel{T} + dT = 0$$

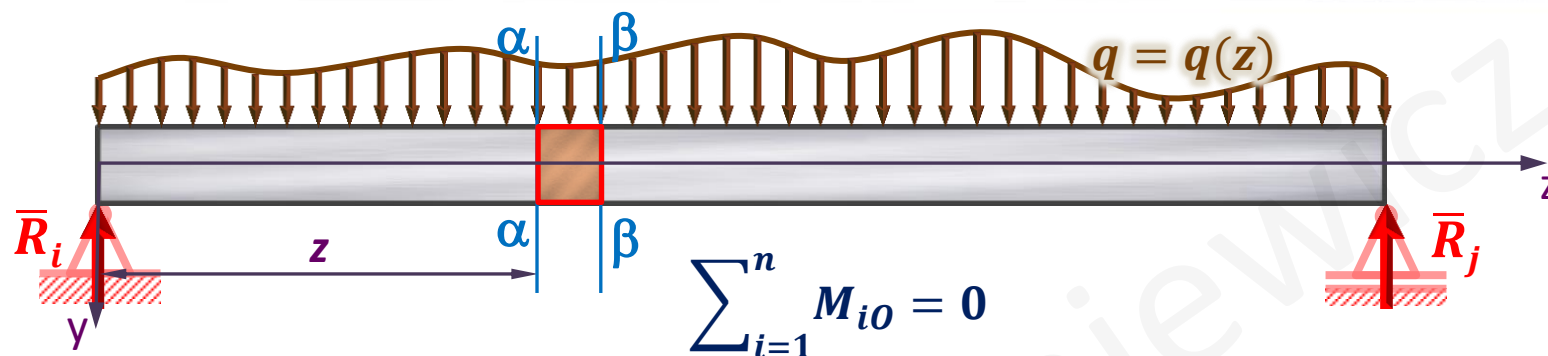


$$q(z) = -\frac{dT}{dz}$$

Wniosek:

W zakresie długości belki gdzie obciążona jest ona stałym co do wartości obciążeniem ciągłym ($q(z) = const \neq 0$) siła tnąca opisana jest równaniem pierwszego stopnia (zmienia się liniowo)

7.5. Zależności pomiędzy siłami wewnętrznymi a obciążeniem ciągłym belek – tw. Schwedlera–Żurawskiego

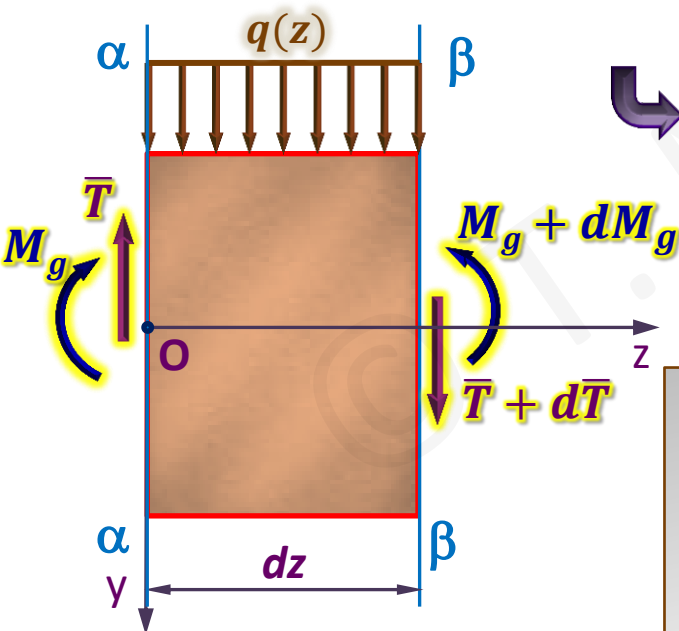


$$\sum_{i=1}^n M_{i0} = 0$$

$$\hookrightarrow -M_g - q(z) \frac{(dz)^2}{2} - (T + dT)dz + (M_g + dM_g) = 0$$

$$\hookrightarrow -\cancel{M_g} - q(z) \frac{(dz)^2}{2} - Tdz + dTdz + \cancel{M_g} + dM_g = 0$$

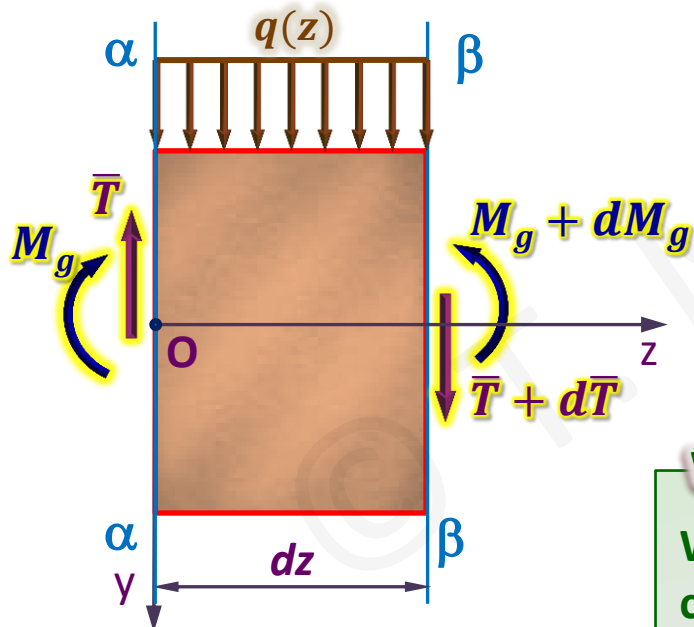
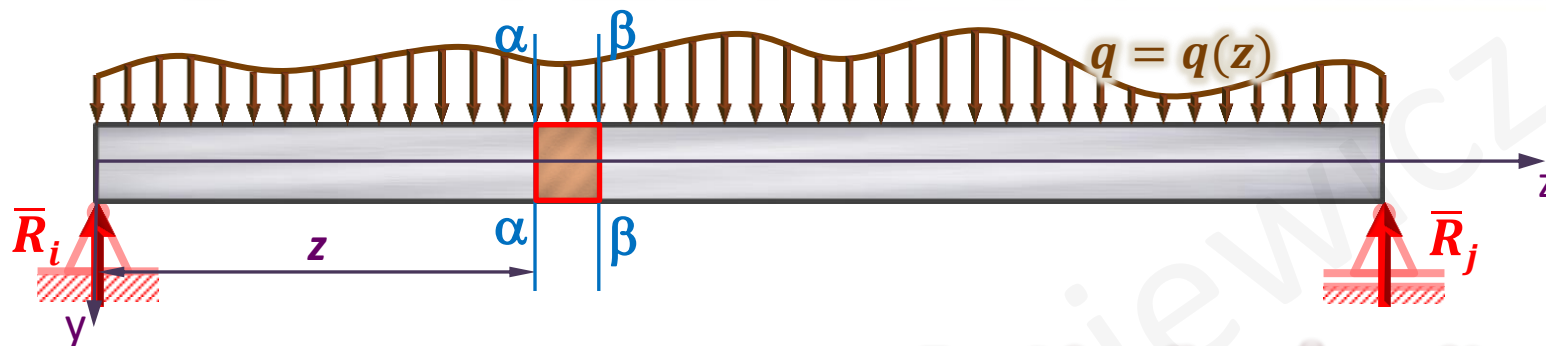
$$\hookrightarrow -Tdz + dM_g = 0 \quad \rightarrow \quad T(z) = \frac{dM_g}{dz}$$



Wnioski:

- ✓ Pochodna funkcji momentu zginającego po współrzędnej wzdłuż osi belki jest równa sile poprzecznej.
- ✓ Ekstremum momentu zginającego wystąpi w przekroju gdzie siła poprzeczna jest równa zero.

7.5. Zależności pomiędzy siłami wewnętrznymi a obciążeniem ciągłym belek – tw. Schwedlera–Żurawskiego



Tw. Schwedlera – Żurawskiego

$$q(z) = -\frac{dT}{dz}$$

$$T(z) = \frac{dM_g}{dz}$$

$$q(z) = -\frac{d^2 M_g}{dz^2}$$

Wniosek:

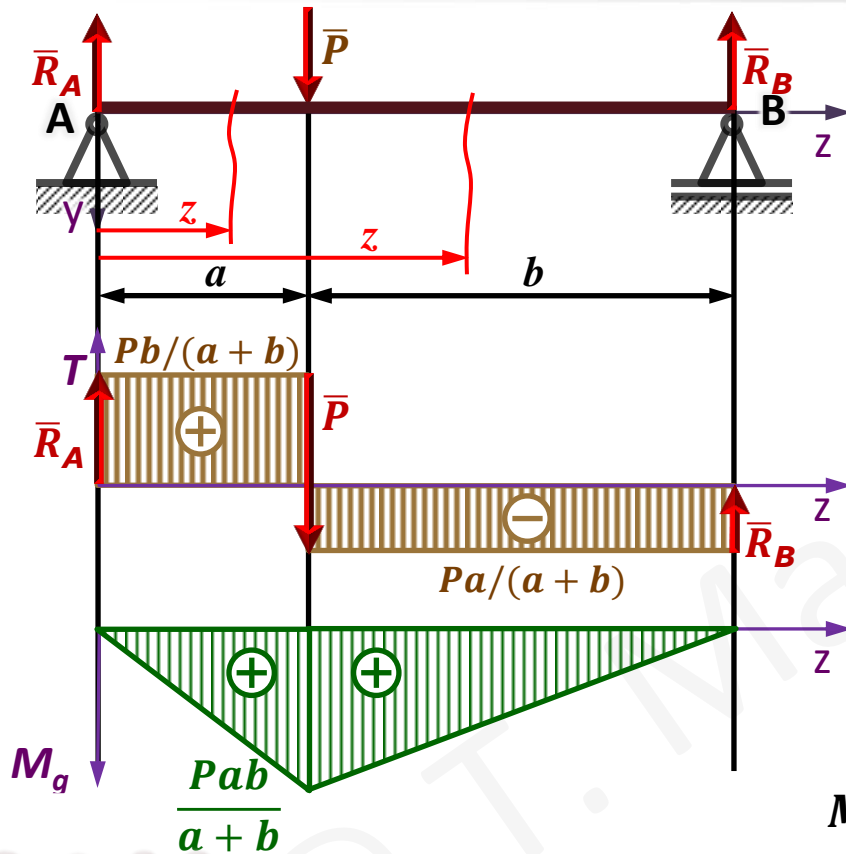
W zakresie długości belki gdzie obciążona jest ona stałym co do wartości obciążeniem ciągłym ($q(z) = \text{const} \neq 0$) moment zginający jest opisany równaniem drugiego stopnia (zmienia się według paraboli).

7.6. Wyznaczanie sił wewnętrznych w belkach - przykłady

Przykład 7.1

Dane: a, b, P

Szukane: Wykresy $T(z), M_g(z)$



$$\sum_{i=1}^n M_{iA} = 0 \Rightarrow -Pa + R_B(a+b) = 0$$

$$\Rightarrow R_B = \frac{Pa}{a+b}$$

$$\sum_{i=1}^n M_{iB} = 0 \Rightarrow -R_A(a+b) + Pb = 0$$

$$\Rightarrow R_A = \frac{Pb}{a+b}$$

$$0 \leq z \leq a$$

$$M_{g(z)} = R_A \cdot z = \frac{Pb}{a+b} \cdot z$$

$$M_{g(z=0)} = 0; \quad M_{g(z=a)} = \frac{Pab}{a+b}$$

$$a \leq z \leq a+b$$

$$M_{g(z)} = R_A \cdot z - P(z-a) = \frac{Pb}{a+b} \cdot z - P(z-a)$$

$$M_{g(z=a)} = \frac{Pab}{a+b} \quad M_{g(z=a+b)} = 0$$

Spostrzeżenia:

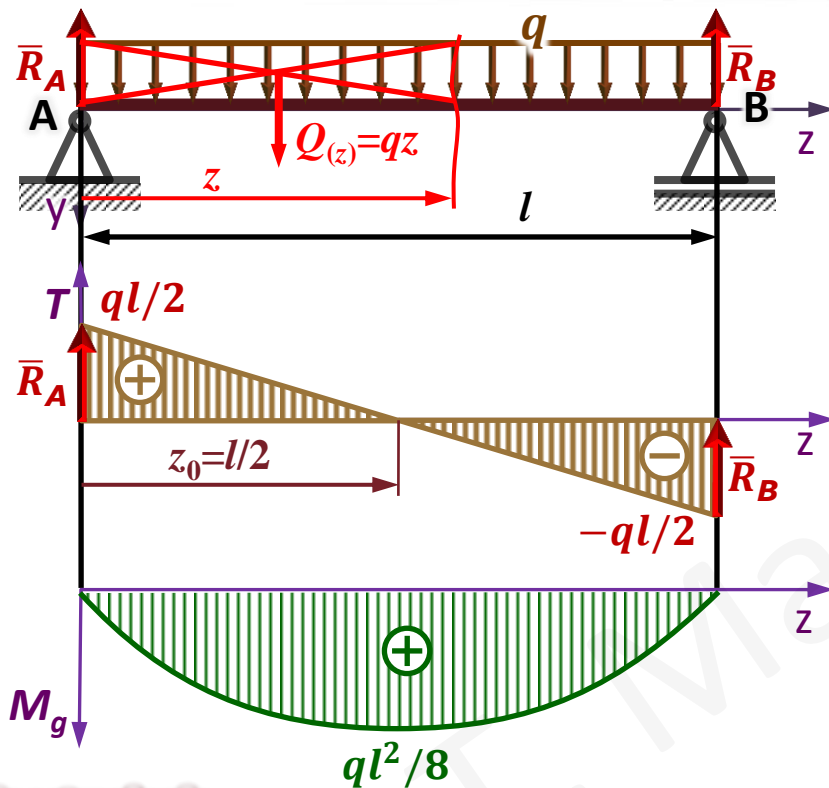
- 1) W miejscu działania skupionej siły poprzecznej występuje skokowa zmiana wartości siły tnącej.
- 2) Na końcach belki, o ile nie działa tam moment skupiony, moment zginający jest równy zero.

7.6. Wyznaczanie sił wewnętrznych w belkach - przykłady

Przykład 7.2

Dane: l, q

Szukane: Wykresy $T(z), M_g(z)$



Spostrzeżenia:

3) W zakresie działania niezerowego obciążenia ciągłego siła tnąca zmienia się liniowo, zaś moment zginający według parboli.

4) W miejscu gdzie siła poprzeczna osiąga wartość zero występuje ekstremum momentu zginającego.

$$\sum_{i=1}^n M_{iA} = 0 \Rightarrow -ql \cdot \frac{l}{2} + R_B l = 0$$

$$\sum_{i=1}^n M_{iB} = 0 \Rightarrow ql \cdot \frac{l}{2} - R_A l = 0$$

$$R_A = R_B = \frac{ql}{2}$$

$$0 \leq z \leq l$$

$$T(z) = R_A - qz = \frac{ql}{2} - qz$$

$$T_{(z=0)} = \frac{ql}{2} \quad T_{(z=l)} = -\frac{ql}{2}$$

$$T_{(z=z_0)} = \frac{ql}{2} - qz_0 = 0 \Rightarrow z_0 = \frac{l}{2}$$

$$M_{g(z)} = R_A \cdot z - q \cdot z \cdot \frac{z}{2} = \frac{ql}{2} z - q \cdot \frac{z^2}{2}$$

$$M_{g(z=0)} = 0 \quad M_{g(z=l)} = 0$$

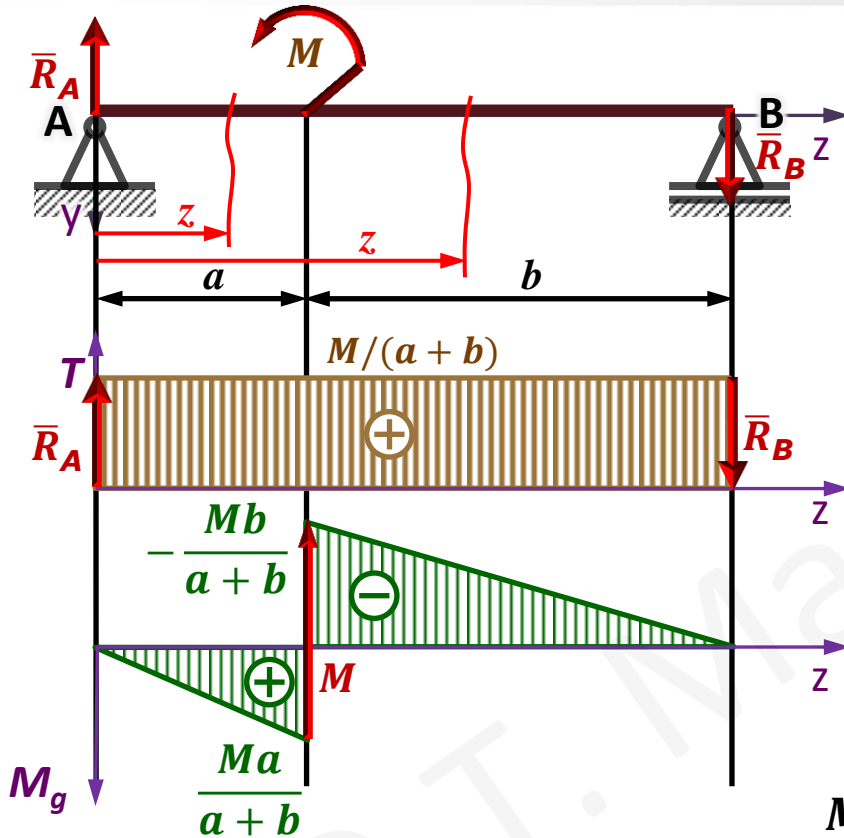
$$M_{g(z=z_0=l/2)} = \frac{ql}{2} \cdot \frac{l}{2} - q \cdot \frac{l^2}{8} = \frac{ql^2}{8}$$

7.6. Wyznaczanie sił wewnętrznych w belkach - przykłady

Przykład 7.3

Dane: a, b, M

Szukane: Wykresy $T(z), M_g(z)$



$$\sum_{i=1}^n M_{iA} = 0 \Rightarrow M - R_B(a + b) = 0$$

$$\Rightarrow R_B = \frac{M}{a + b}$$

$$\sum_{i=1}^n M_{iB} = 0 \Rightarrow M - R_A(a + b) = 0$$

$$\Rightarrow R_A = \frac{M}{a + b}$$

$$0 \leq z < a$$

$$M_{g(z)} = R_A \cdot z = \frac{M}{a + b} \cdot z$$

$$M_{g(z=0)} = 0; \quad M_{g(z=a)} = \frac{Ma}{a + b}$$

$$a \leq z \leq a + b$$

$$M_{g(z)} = R_A \cdot z - M \quad M_{g(z)} = \frac{M}{a + b} \cdot z - M$$

$$M_{g(z=a)} = \frac{Ma}{a + b} - M = M \left(\frac{a}{a + b} - 1 \right) = -\frac{Mb}{a + b}$$

$$M_{g(z=a+b)} = 0$$

Spostrzeżenie:

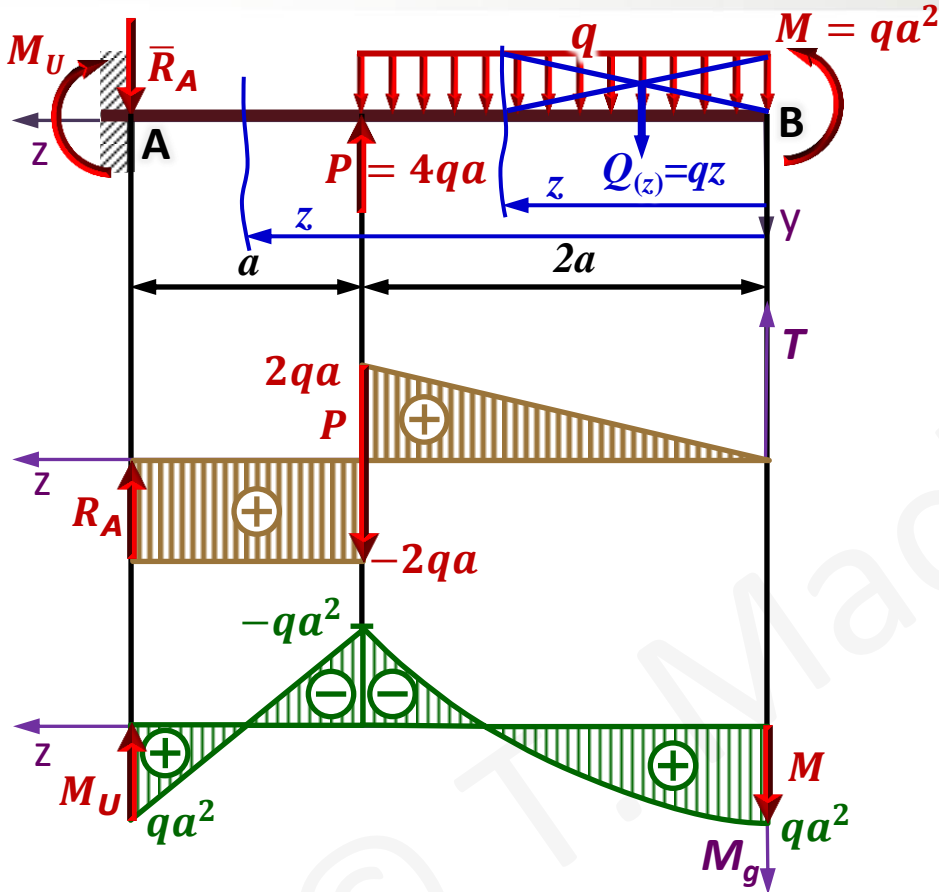
5) W miejscu działania skupionego momentu występuje skokowa zmiana wartości momentu zginającego.

7.6. Wyznaczanie sił wewnętrznych w belkach - przykłady

Przykład 7.4

Dane: a, q

Szukane: Wykresy $T(z), M_g(z)$



$$0 \leq z \leq 2a$$

$$T(z) = qz$$

$$T_{(z=0)} = 0 \quad T_{(z=2a)} = 2qa$$

$$M_g(z) = M - qz \cdot \frac{z}{2} = qa^2 - q \frac{z^2}{2}$$

$$M_g(z=0) = qa^2 \quad M_g(z=2a) = -qa^2$$

$$2a \leq z \leq 3a$$

$$T(z) = q \cdot 2a - P = 2qa - 4qa = -2qa$$

$$M_g(z) = M - q \cdot 2a \cdot (z - a) + P(z - 2a)$$

$$M_g(z) = qa^2 + 2qa^2 - 2qaz + 4qaz - 8qa^2$$

$$M_g(z) = 2qaz - 5qa^2$$

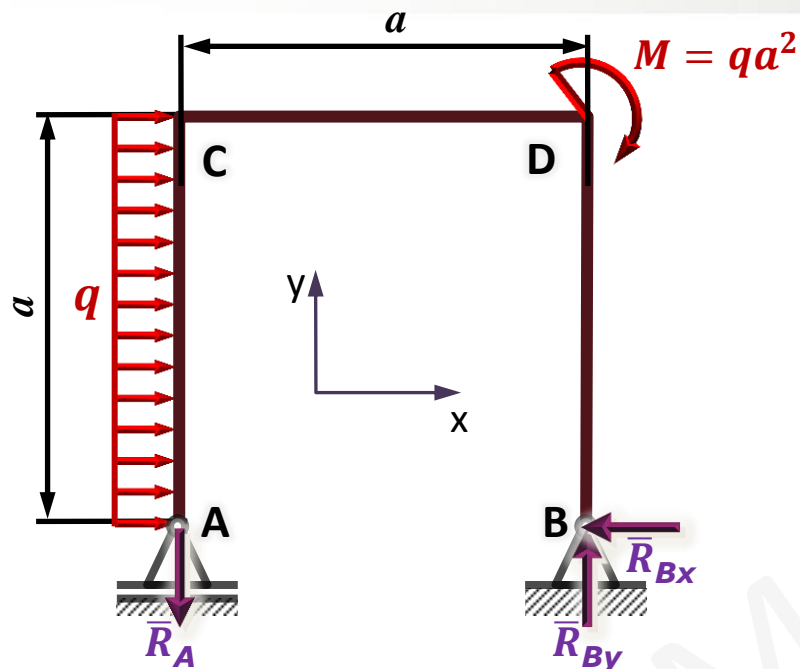
$$M_g(z=2a) = -qa^2 \quad M_g(z=3a) = qa^2$$

7.6. Wyznaczanie sił wewnętrznych w belkach - przykłady

Przykład 7.5

Dane: a, q

Szukane: Wykresy $T(z), M_g(z)$



1. Wyznaczanie reakcji:

$$\sum_{i=1}^n M_{iB} = 0 \Rightarrow -qa \frac{a}{2} - \boxed{qa^2} + R_{By}a = 0$$

$$R_{By} = \frac{3}{2}qa$$

$$\sum_{i=1}^n F_{iy} = 0 \Rightarrow -R_A + \boxed{R_{By}}a = 0$$

$$R_A = \frac{3}{2}qa$$

$$\sum_{i=1}^n F_{ix} = 0 \Rightarrow qa - R_{Bx} = 0$$

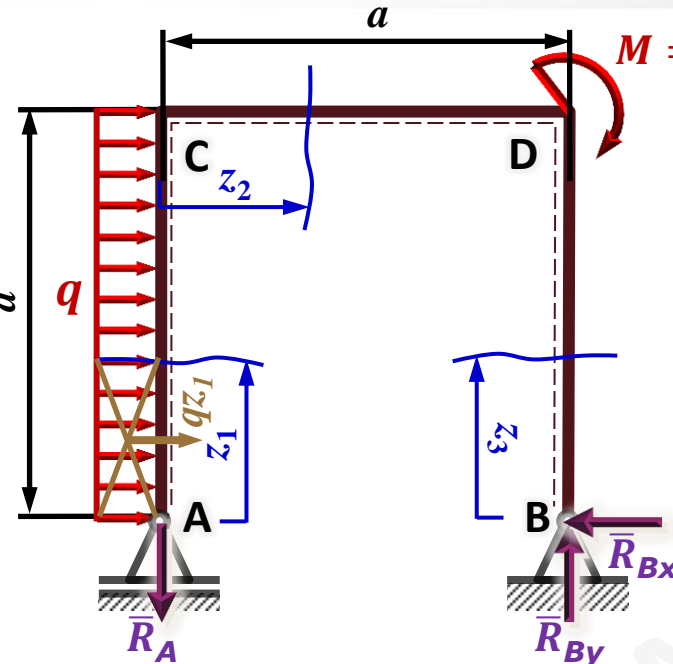
$$R_{Bx} = qa$$

7.6. Wyznaczanie sił wewnętrznych w belkach - przykłady

Przykład 7.5

Dane: a, q

Szukane: Wykresy $T(z), M_{\sigma}(z)$



$$R_A = \frac{3}{2}qa \quad R_{Bx} = qa \quad R_{By} = \frac{3}{2}qa$$

2. Wyznaczanie sił poprzecznych:

$$0 \leq z_1 \leq a$$

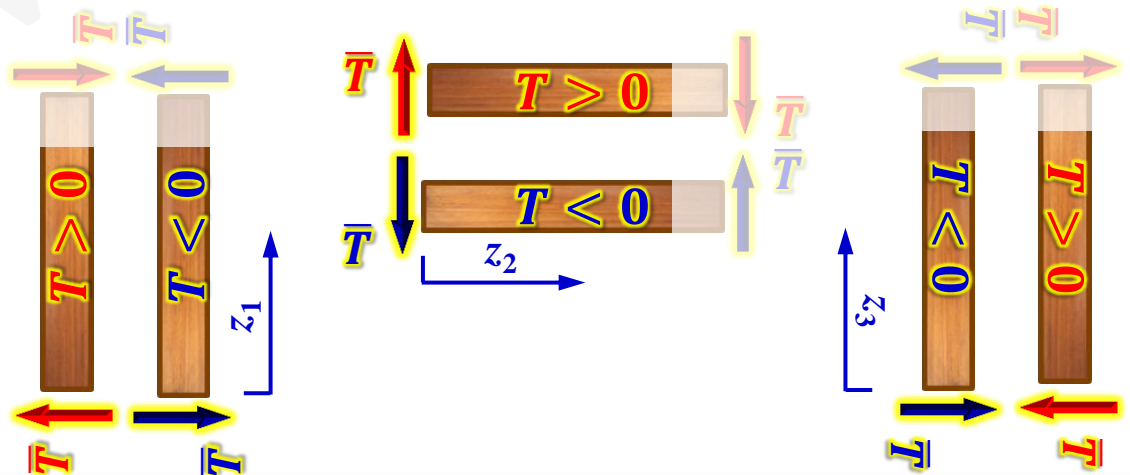
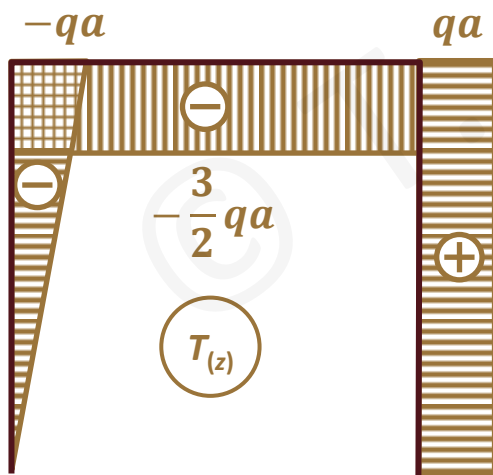
$$T_{(z_1)} = -qz_1 \Rightarrow T_{(z_1=0)} = 0 \quad T_{(z_1=a)} = -qa$$

$$0 \leq z_2 \leq a$$

$$T_{(z_2)} = -RA = -\frac{3}{2}qa \Rightarrow T_{(z_2=0)} = T_{(z_2=a)} = -\frac{3}{2}qa$$

$$0 \leq z_3 \leq a$$

$$T_{(z_3)} = R_{Bx} = qa \Rightarrow T_{(z_3=0)} = T_{(z_3=a)} = qa$$

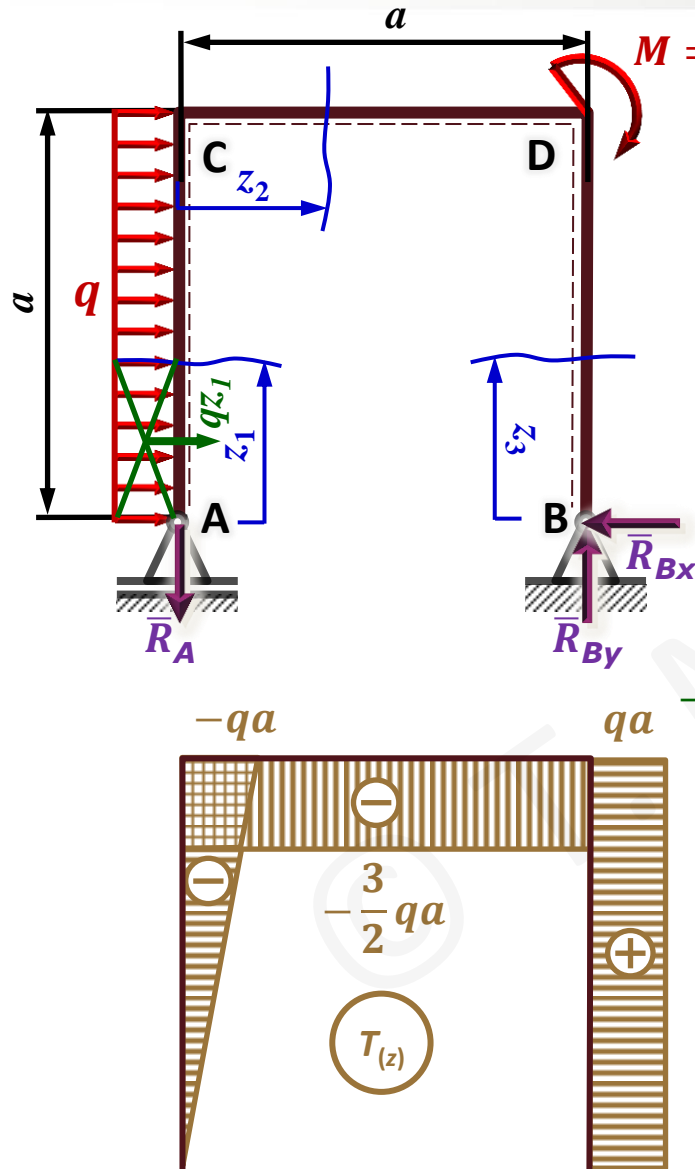


7.6. Wyznaczanie sił wewnętrznych w belkach - przykłady

Przykład 7.5

Dane: a, q

Szukane: Wykresy $T(z), M_g(z)$



$$R_A = \frac{3}{2}qa \quad R_{Bx} = qa \quad R_{By} = \frac{3}{2}qa$$

3. Wyznaczanie momentów zginających:

$$0 \leq z_1 \leq a: M_g(z_1) = -qz_1 \frac{z_1}{2} = -q \frac{z_1^2}{2}$$

$$\hookrightarrow M_g(z_1=0) = 0$$

$$M_g(z_1=a) = -q \frac{a^2}{2}$$

$$0 \leq z_2 \leq a: M_g(z_2) = -q \frac{a^2}{2} - RAz_2 = -q \frac{a^2}{2} - \frac{3}{2}qaz_2$$

$$\hookrightarrow M_g(z_2=0) = -q \frac{a^2}{2}$$

$$M_g(z_2=a) = -2qa^2$$

$$0 \leq z_3 \leq a: M_g(z_3) = -R_{Bx} z_3 = -qaz_3$$

$$\hookrightarrow M_g(z_3=0) = 0$$

$$M_g(z_3=a) = -qa^2$$

